

חדוֹא 2 למדעים הניסויים 71014

פרק 12 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1.	מבוא
1	2. הפרדט משתנים
3	3. משואה הומוגנית
5	4. משואה לינארית מסדר ראשון
7	5. פתרונות גרפים ונוסריים למשואה מסדר ראשון
	(ללא ספר)

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$(y \neq 0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (1)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (2)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (3)$$

$$y(2) = 1 ; \quad (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (4)$$

$$y(1) = -1 ; \quad \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (5)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (6)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (7)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (8)$$

$$y(\pi) = 1 ; \quad y' + y^2 \sin x = 0 \quad (9)$$

$$(\cos x \neq 0) \quad y(0) = 5 ; \quad \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (10)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad (11)$$

תשובות סופיות

$$y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k} \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}, \quad y=0 \quad (2)$$

$$\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c \quad (3)$$

$$\frac{1}{4} \ln|y| = \ln|x-1| \quad (4)$$

$$\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5 \quad (5)$$

$$y = 2 \pm \sqrt{(x-1)^2 + k} \quad (6)$$

$$y = 2 \tan(2t^2 + k) \quad (7)$$

$$x = 1 + \tan(t+c) \quad (8)$$

$$y = -\frac{1}{\cos x} \quad (9)$$

$$\ln|y| = \tan x + \ln 5 \quad (10)$$

$$\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5 \quad (11)$$

משואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות 1-8 :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (1)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (2)$$

$$y^2 + x^2y' = xyy' \quad (3)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (4)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x} \right) dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (5)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} \quad (6)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dx - x dy = 0 \quad (7)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (8)$$

$$(y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 \quad (9)$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n , על מנת שהמשואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

תשובות סופיות

$$-\ln|x| = \frac{1}{6} \ln \left| 2 \left(\frac{y}{x} \right)^3 + 1 \right| + c, \quad y = -\frac{x}{2^{1/3}} \quad (1)$$

$$\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) - 1 \right| - \frac{5}{4} \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) + 3 \right| + c, \quad y = x, \quad y = -3x \quad (2)$$

$$-\ln|x| = \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right) - \left(\frac{y}{x} \right) + c, \quad y = 0 \quad (3)$$

$$-\ln|x| = \frac{1}{4} \ln \left| 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 4 \right| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x \quad (4)$$

$$\ln|x| = -\sin \left(\frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

$$\ln \left(1 + e^{\left(\frac{y}{x} \right)^2} \right) = \ln|y| + c, \quad y = 0 \quad (6)$$

$$\ln x = \sinh^{-1} \left(\frac{x}{y} \right) + c \quad (7)$$

$$\ln|t| = -\frac{1}{2} \ln \left| \left(\frac{x}{t} \right) - \left(\frac{x}{t} \right)^2 \right| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t \quad (8)$$

$$n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln \left(1 + 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right) + c \quad (9)$$

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (1)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (2)$$

$$(x > 2) \quad (x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (3)$$

$$(x > 0) \quad x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3 \quad (4)$$

$$y(0) = 1 ; \quad \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (5)$$

$$(\sin x > 0) \quad \frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (6)$$

$$(\sin x > 0) \quad y' - 2y \cot x = 1 \quad (7)$$

$$z(\pi) = 0 ; \quad x^2z' + 2xz = \cos x \quad (8)$$

$$ydx = (2x + y^3)dy \quad (9)$$

תשובות סופיות

$$y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (1)$$

$$y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (2)$$

$$y = (x-2) [x^2 - 4x + C] \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{2} x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (4)$$

$$y = 2t + e^{-t} \quad (5)$$

$$y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C] \quad (6)$$

$$y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (7)$$

$$z = \frac{\sin x}{x^2} \quad (8)$$

$$x(y) = y^2(y+c) \quad (9)$$

פתרונות גרפים ונומריים למשואה מסדר ראשון

שאלות

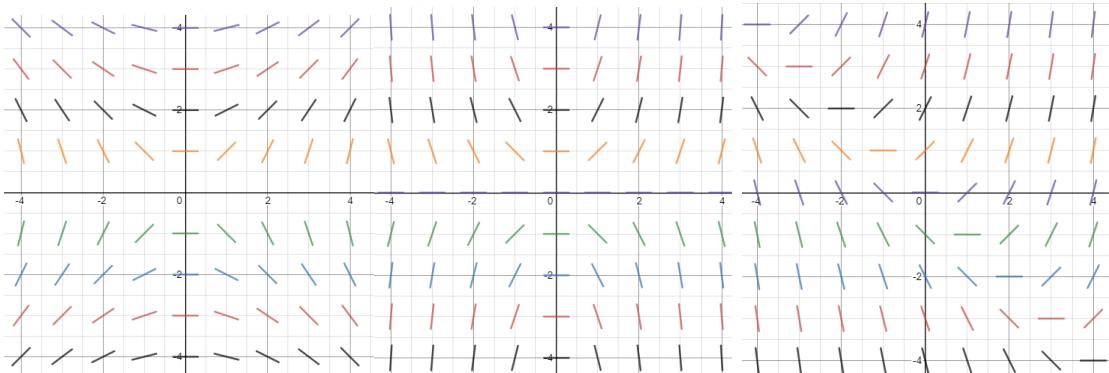
1) שרטטו שדה כיוונים למשואה הדיפרנציאלית $y' = 2y - x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א-ג' לשדה הכוונים שלה:

א. $y' = \frac{x}{y}$

ב. $y' = xy$

ג. $y' = x + y$



איור 3

איור 2

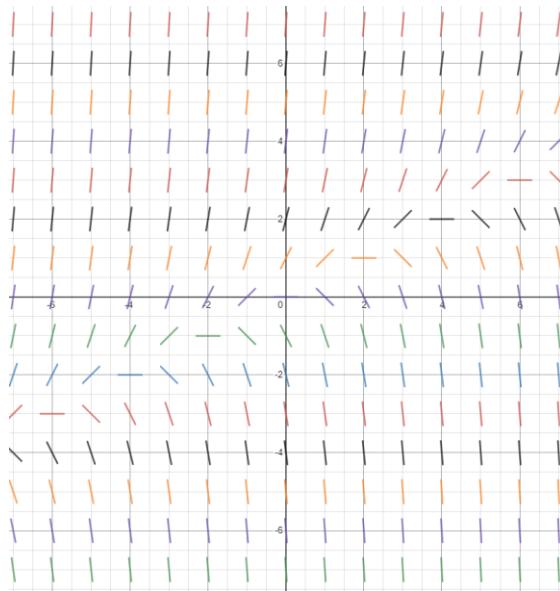
איור 1

3) נתונה המש"ר $y' = y - x$, $y(0) = 2$

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.1$.

4) נתונה המש"ר $y' = x + y$, $y(1) = 2$

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h = 0.2$.

תשובות סופיות**(1)****(2)** איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

$y(1) = 4.593$ **(3)**

$y(2) = 6.95328$ **(4)**